ALGEBRĂ VECTORIALĂ

(1) Fie triunghiul ABC. Notăm cu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vectorii $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ și respectiv $\overrightarrow{AB}$.

Să se exprime cu ajutorul lor vectorii ce coincid cu medianele triunghiului și să se arate că aceștia pot forma un triunghi.

<u>Indicație</u> Dacă $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ și $\overrightarrow{CC'}$ sunt cele trei mediane ale triunghiului, atunci avem $\overrightarrow{AA'} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}$ ...

Se ține cont de rezultatul: trei vectori oarecare <u>închid</u> un triunghi dacă și numai dacă suma lor este vectorul nul.

(2) Fie triunghiul ABC, G centrul său de greutate și M un punct oarecare. Să se demonstreze că:

a) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$;

b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

(3) Se consideră vectorii:

$$\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}\ ;\ \vec{b} = -2\vec{i} + 8\vec{j} - \vec{k}\ ;\ \vec{c} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k};$$
$$\vec{d} = 2\vec{i} + \vec{k}.$$

Să se determine $\vec{v}_1 = \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$ și $\vec{v}_2 = 2\vec{a} + \vec{b} - 4\vec{d}$.

<u>Răspuns.</u> $\vec{v}_1 = -7\vec{i} + 8\vec{j}$; $\vec{v}_2 = -8\vec{i} + 12\vec{j} - 11\vec{k}$.

(4) Fie $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trei vectori necoplanari. Să se cerceteze dacă vectorii:

1) $\vec{u}' = 2\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$; $\vec{v}' = -\vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w}$; $\vec{w} = -\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}$;

2) $\vec{u}' = \vec{w}$; $\vec{v}' = \vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$; $\vec{w}' = \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$;

3) $\vec{u}' = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$; $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{w}$; $\vec{w}' = -\vec{u} + \vec{w}$;

4) $\vec{u}' = \vec{u} + 2\vec{v} + 3\vec{w}$; $\vec{v}' = 2\vec{u} + 3\vec{v} + 4\vec{w}$; $\vec{w}' = 3\vec{u} + 4\vec{v} + 5\vec{w}$

sunt coplanari și în caz afirmativ să se găsească relația dintre ei.

<u>Indicație</u>. Se ține cont că trei vectori necoplanari formează o bază în spațiul liniar real tridimensional al vectorilor geometrici V_3. Se scrie matricea de trecere C de la baza $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ la fiecare sistem de vectori. Se calculează rang C. Dacă rang $C \leq 2$ vectorii sunt coplanari (liniar dependenți), iar dacă rang $C = 3$ vectorii sunt necoplanari sau liniar independenți.

<u>Răspuns</u> 1) $r = 2$, coplanari; 2) $r = 2$, coplanari; 3) $r = 3$, necoplanari; 4) $r = 2$, coplanari. În caz că sunt coplanari relația dintre ei este:
1) $\vec{w}' = -\vec{u}' - \vec{v}'$; 2) $\vec{w}' = 2\vec{u}' + \vec{v}'$; 4) $\vec{u}' = 2\vec{v}' - \vec{w}'$.

(5) Se dau vectorii geometrici $\vec{u} = \lambda\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} + \lambda\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{w} = \lambda\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$. Să se determine $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii să fie coplanari și în acest caz să se descompună vectorul $\vec{u}$ după vectorii $\vec{v}$ și $\vec{w}$.

(6) Fie vectorii geometrici $\vec{a} = (\lambda - 1)\vec{i} + \vec{j} - \lambda\vec{k}$ și $\vec{b} = 2\vec{i} + \lambda\vec{j} - \vec{k}$. Să se determine $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ să fie ortogonali.

<u>Răspuns</u>. Din $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$.

TEMA NR. 8

pagina 3

(7) Fie vectorii $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ și $\vec{v}_2 = \vec{i} - \vec{k}$. Să se calculeze:

a) produsul lor vectorial $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$;

b) să se verifice că vectorul obținut este perpendicular pe $\vec{v}_1$, dar și pe $\vec{v}_2$;

c) aria paralelogramului construit pe $\vec{v}_1$ și $\vec{v}_2$;

d) unghiul dintre cei doi vectori.

Răspuns. a) $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = -\vec{i} - \vec{k}$;

b) $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_1 = 0, \ldots$

c) $\mathcal{A}$ = aria paralelogramului =

$= \|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\| = \sqrt{2}$

d) $\cos\varphi = \dfrac{4}{3\sqrt{2}}$, unde $\varphi = \measuredangle(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

(8) Se dau punctele $A(2, 3, -1)$, $B(2, 1, 3)$, $C(3, 1, 1)$. Să se determine:

a) vectorii de poziție ai celor trei puncte: $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ și $\vec{OC}$;

b) aria triunghiului ABC;

c) mijlocul segmentului AB și centrul de greutate G al triunghiului.

Răspuns. a) $\vec{OA} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}, \ldots$

b) $\mathcal{A} = 3$;

c) dacă D este mijlocul lui AB, atunci $D(2, 2, 1)$;

d) $G(7/3, 5/3, 1)$.

TEMA NR. 8
pagina 4

(9) Se dau punctele $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$ și $D(-5,-4,8)$. Să se determine:

1) volumul tetraedrului $ABCD$ și lungimea înălțimii coborâtă din D pe planul ABC;

2) unghiul dintre muchiile tetraedrului.

<u>Răspuns.</u> 1) $Vol = \frac{1}{6}|(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})| =$

$$= \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}\cdot 308 = \frac{154}{3}\ ; \ h_D = 11.$$

2) $\cos(\widehat{AB, AC}) = \dfrac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{\|\vec{AB}\|\cdot\|\vec{AC}\|} = -\dfrac{10}{\sqrt{13\cdot 17}} \dots$

(10) Se dau vectorii $\vec{v}_1 = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{v}_2 = 2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$ și $\vec{v}_3 = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Să se calculeze produsele vectoriale $\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3)$ și $(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \times \vec{v}_3$ și să se compare rezultatele.

(11) Să se rezolve ecuația vectorială $\vec{a} \times \vec{v} = \vec{b}$ știind că $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ și $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$.

<u>Răspuns.</u> dacă $\vec{v} = (x, y, z)$, atunci rezultă $x = \frac{5}{2} - \frac{\alpha}{2}$; $y = \frac{3-\alpha}{2}$; $z = \alpha$, cu $\alpha \in \mathbb{R}$.

(12) Să se rezolve sistemul de ecuații vectoriale
$$\begin{cases} \vec{a}\cdot\vec{v} = 1 \\ \vec{b}\times\vec{v} = \vec{c} \end{cases}$$
știind că: $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ și $\vec{c} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$

Răspuns. $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$.